Elektriska Drivsystems Mekanik (Kap 6)

Newtons andra lag!

- En av de mera viktiga dynamiska ekvationerna för elektriska maskiner.

$$\frac{d}{dt}(J\omega) = T_d - T_L$$

där ω betecknar vinkelhastigheten och J kallas tröghetsmoment. T_d och T_L betecknar drivande moment och lastmoment.

- Om tröghetsmomentet är konstant kan man skriva om den dynamiska ekvationen

$$J\frac{d\omega}{dt} = T_d - T_L$$

- Observera att vinkelhastigheten kan skrivas som tidsderivatan av vinkeln θ

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

Tröghetsmoment!

Tröghetsmoment betecknas med *J* och används för att beskriva stela kroppars dynamik.

En kropps tröghetsmoment är ett mått på det vridmoment som krävs för en given ändring av kroppens rotationshastighet kring en given axel.

Tröghetsmomentet har samma roll för rotationsrörelser som massa har för translationsrörelser.

Translationsrörelse (I)

- I många tillämpningar används inte motorn för en renodlad rotationsrörelse, utan för någon form av translation, t.ex. i hissar, kranar eller valsverk.
- Antag att en kranmotor som driver ett hjul med radie r vid vinkelhastigheten ω. Den belastande kraften f_L ger

$$T_L = r \cdot f_L$$

- På samma sätt kan det drivande momentet skrivas

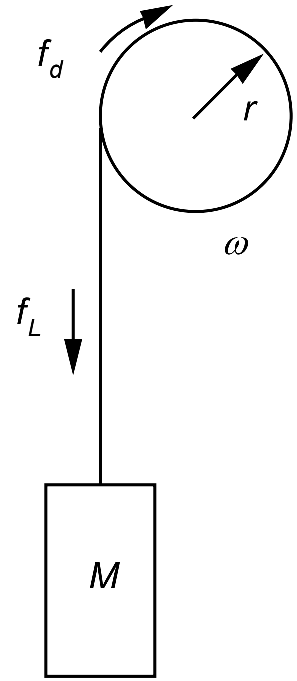
$$T_d = r \cdot f_d$$

- Hastigheten för massan M kan skrivas

$$v = r \cdot \omega$$

- Newtons 2:a lag, $\Sigma f = \frac{d}{dt}(mv)$ eller $\Sigma T = \frac{d}{dt}(J\omega)$, ger:

$$\frac{d}{dt}(Mv) = f_d - f_L \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}(Mr\omega) = \frac{T_d}{r} - \frac{T_L}{r} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\left(Mr^2\right)}_{J_{ekv}} \cdot \frac{d\omega}{dt} = T_d - T_L$$



Figur 6.1. En enkel modell av en kran.

Translationsrörelse (II)
- Exempel: Energin i en rulltrappa

En rulltrappa till Silja Lines finlandsfärja drivs med en frekvensomvandlarmatad asynkronmaskin. Rulltrappan har 30 graders lutning, 60 m längd och drivs med hastigheten 0.65 m/s. Den ska klara att samtidigt transportera passagerare med sammanlagd vikt på 6000 kg. Den ska kunna gå i båda riktningarna, uppåt vid lastning av båten och nedåt vid avlastning. Full båt beräknas rymma motsvarande 200000 kg passagerare. Det kommer in 4 fullastade båtar per dag, 300 dagar om året.

Translationsrörelse (III)
- Exempel: Energin i en rulltrappa

a) Dimensionera en lämplig motoreffekt.

När trappan går nedåt måste samma effekt kunna tas emot med motorn i generatordrift. Frekvensomvandlaren kan, mot en extra avgift om 9000 kronor, utrustas med en anordning för att återmata energi till elnätet vid generatordrift.

b) Med 90 % verkningsgrad, och ett energipris på 0.50 SEK/kWh, hur lång tid tar det innan denna anordning är återbetald?

Translationsrörelse (IV)
- Exempel: Energin i en rulltrappa

Lösning:

a) Effektbehov då rulltrappan går uppåt:
$P = F \cdot v = 6000 \cdot g \cdot 0.65 \cdot \sin(30°)\ \mathrm{W} = 19130\ \mathrm{W}$. Eftersom motorn skall klara viss överbelastning väljer man t.ex närmast större motor. (En titt i ABBs katalog ger en motor på $20\ \mathrm{kW}$).

b) Den totala lägesenergin för en båtlast människor är:
$W = 200000 \cdot \mathrm{g} \cdot 30\ \mathrm{J} = 58.9 \cdot 10^6\ \mathrm{J}$
Totalt återvinningsbar energi, omräknat till kronor med det gällande energipriset: $0.9 \cdot W = 53.0 \cdot 10^6\ \mathrm{Ws} = 14.7\ \mathrm{kWh} \Leftrightarrow 7.36\ \mathrm{kr}$
Återbetalningstiden för återmatningsutrustningen:

$$\frac{9000}{7.36}\ \text{turer} = 1223\ \text{turer} \quad \Leftrightarrow \quad 306\ \text{dagar} \quad \Leftrightarrow \quad 1\ \text{år och}\ 6\ \text{dagar}$$

Tröghetsmoment

- Allmänt:

$$J = \int_V r^2 dM$$

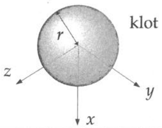
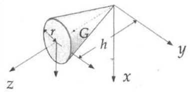
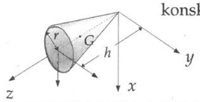
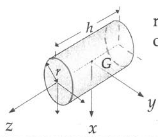
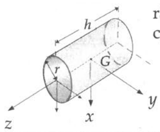
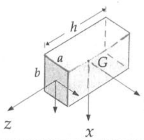
- För en homogen cylinder med massan M och radien R ges tröghetsmomentet av:

$$J = \frac{M \cdot R^2}{2} \quad [\mathrm{kgm}^2]$$

- Den i rotationsrörelsen upplagrade mekaniska energin ges av

$$W = \frac{1}{2} J \cdot \omega^2 \quad [\mathrm{J}]$$

Tröghetsmoment

 klot	$\text{Volym} = \frac{4\pi r^3}{3}$	$I_x = I_y = I_z = \frac{2mr^2}{5}$
 rät cirkulär kon	$z_G = \frac{3h}{4}$ $\text{Volym} = \frac{\pi r^2 h}{3}$	$I_y = \frac{3mr^2}{20} + \frac{3mh^2}{5}$ $I_z = \frac{3mr^2}{10}$
 rät cirkulärt konskal	$z_G = \frac{2h}{3}$	$I_y = \frac{mr^2}{4} + \frac{mh^2}{2}$ $I_z = \frac{mr^2}{2}$
 rät cirkulär cylinder	$\text{Volym} = \pi r^2 h$	$I_x^G = \frac{mr^2}{4} + \frac{mh^2}{12}$ $I_z^G = \frac{mr^2}{2}$
 rät cirkulärt cylinderskal	$\text{Area} = 2\pi rh$	$I_x^G = \frac{mr^2}{2} + \frac{mh^2}{12}$ $I_z^G = mr^2$
 rektangulär parallellepiped	$\text{Volym} = abh$	$I_x^G = \frac{m}{12}(a^2 + h^2)$ $I_y^G = \frac{m}{12}(b^2 + h^2)$ $I_z^G = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$

Exempel: Ett svänghjuls tröghetsmoment

Ett energilagringssystem med svänghjul ska ersätta det konventionella batteripaketet i en anläggning för avbrottsfri kraft. Svänghjulet är utformat som en disk av fiberkomposit, vilket har en energi-massadensitet på 12 Wh/kg, och ska lagra 500 Wh. Rotationshastigheten är 12000 rpm. Beräkna svänghjulets tröghetsmoment och radie.

Lösning:

Tröghetsmomentet fås ur ekvationen för svänghjulsenergin:

$$W = \frac{1}{2} J \cdot \omega^2 \quad \Leftrightarrow \quad J = \frac{2W}{\omega^2} = \frac{2 \cdot 500 \cdot 3600}{\left(12000 \cdot (2\pi/60)\right)^2}\,\mathrm{kgm}^2 = 2.28\,\mathrm{kgm}^2$$

Massan på svänghjulet är M=500/12 kg = 41.7 kg $\Rightarrow$

$$J = \frac{M \cdot R^2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad R = \sqrt{\frac{2J}{M}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2.28}{41.7}}\,\mathrm{m} = 0.33\,\mathrm{m}$$

Inverkan av växlar (I)

- Antag att det vänstra kugghjulet är drivande. Då ger Newtons 2:a lag:

$$J_1 \frac{d\omega_1}{dt} = T_{d1} - r_1 f_1$$

- Kraftbalans ger för det andra kugghjulet (T_L=0):

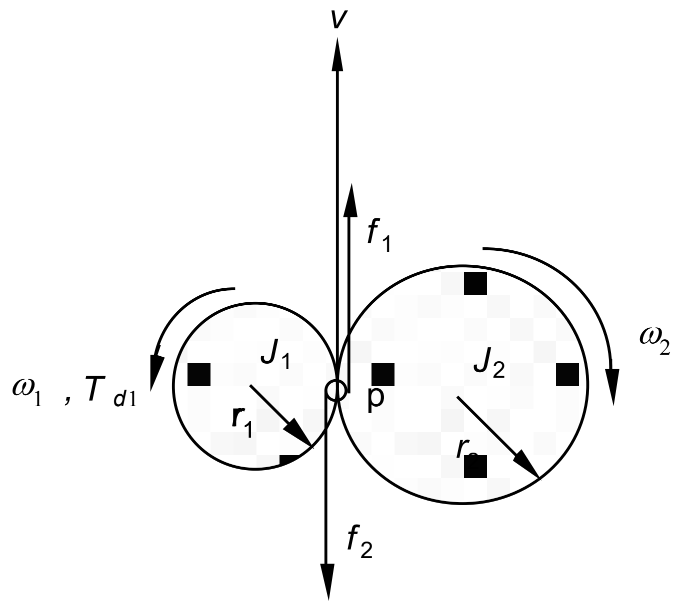
$$J_2 \frac{d\omega_2}{dt} = r_2 f_2$$

- Periferihastigheterna är lika dvs:

$$r_1\omega_1 = r_2\omega_2$$

- Periferikrafterna är också lika stora:

$$f_1 = f_2$$

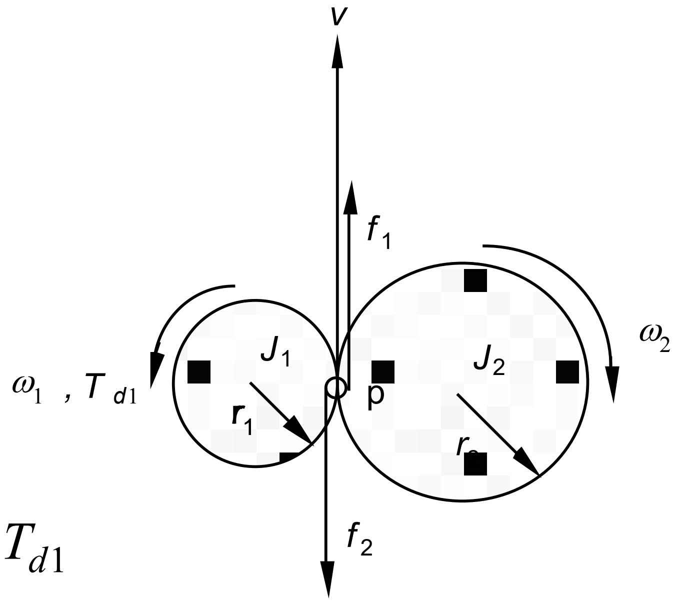


Figur 6.1. En ideal växel

Inverkan av växlar (II)

- Newtons 2:a lag för det första kugghjulet kan nu skrivas

$$J_1 \frac{d\omega_1}{dt} + r_1 f_1 = J_1 \frac{d\omega_1}{dt} + r_1 f_2 = T_{d1}$$



- Sätt in f_2 från Newtons 2:a lag för det andra kugghjulet :

$$J_1 \frac{d\omega_1}{dt} + \frac{r_1}{r_2} \cdot J_2 \frac{d\omega_2}{dt} = J_1 \frac{d\omega_1}{dt} + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \cdot J_2 \frac{d\omega_1}{dt} = T_{d1}$$

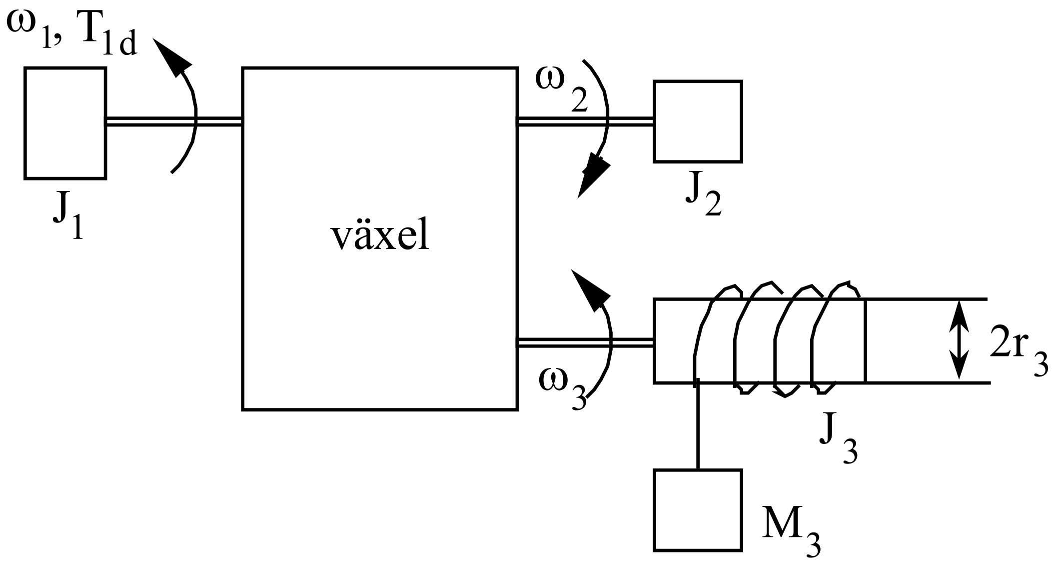
- Skriv om:

$$\left(J_1 + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \cdot J_2\right) \cdot \frac{d\omega_1}{dt} = J_{1,ekv} \cdot \frac{d\omega_1}{dt} = T_{d1} \quad \Rightarrow$$

$$J_{1,ekv} = J_1 + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \cdot J_2 = J_1 + \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 \cdot J_2$$

Inverkan av växlar (III)
- Exempel 1: Växelsystem

Figur 6.3 illustrerar ett exempel med ett drivsystem för en upprullningsmekanism, som är knuten via en växel till en motor. De ingående komponenterna har tröghetsmomenten *J1*, *J2* och *J3*. Beräkna det ekvivalenta tröghetsmomentet sett från axel 1.



Figur 6.3. Vinschsystem med växel.

Inverkan av växlar (IV)
- Exempel 1: Växelsystem

Lösning: Själva rullen med vinschen har ett effektivt tröghetsmoment som är: $J_3 + M_3 \cdot r_3^2$

Systemets ekvivalenta tröghetsmoment, sett från motorn, kan skrivas:

$$J_{1,ekv} = J_1 + \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 \cdot J_2 + \left(\frac{\omega_3}{\omega_1}\right)^2 \cdot \left(J_3 + M_3 r_3^2\right)$$

Newtons andra lag tillämpad på systemet blir således:

$$J_{1,ekv} \cdot \frac{d\omega_1}{dt} = T_{d1} - T_{L1} = T_{d1} - \left(\frac{\omega_3}{\omega_1}\right) \cdot M_3 g r_3$$

Eftersom

$$T_{L3} = f_3 r_3 = M_3 g r_3 \quad \Rightarrow \quad T_{L1} = f_1 r_1 = f_3 r_1 = f_3 r_3 \left(\frac{\omega_3}{\omega_1}\right) = \left(\frac{\omega_3}{\omega_1}\right) \cdot M_3 g r_3$$

Inverkan av växlar (V)

- Exempel 2: En cykels tröghetsmoment

Du och din cykel väger 100 kg tillsammans. Med normal utväxling trampar du med 2 varv/s = 4π rad/s med tramporna vid 24 km/h = 20/3 m/s. Hur stort är det ekvivalenta tröghetsmomentet du som "förare" upplever i trampnavet?

Inverkan av växlar (VI)
- Exempel 2: En cykels tröghetsmoment

Lösning: Problemet kan lösas på flera sätt. De mer komplicerade bygger på att varje del för sig beräknas för att sedan adderas som i föregående exempel. Alternativt, och enklast, kan tröghetsmomentet beräknas genom en energibetraktelse. Cykelns rörelseenergi kan antingen uttryckas som massans energi i en linjär rörelse eller som det roterande tröghetsmomentets energi i trampnavet enligt

$$W_{lin} = \frac{m \cdot v^2}{2} \quad , \quad W_{rot} = \frac{J \cdot \omega^2}{2}$$

Där v är cykelns linjära hastighet: $v = \frac{20}{3 \cdot 4\pi} \cdot \omega = \frac{10}{6\pi} \cdot \omega$

Där ω är trampnavets vinkelhastighet.

Inverkan av växlar (V)
- Exempel 2: En cykels tröghetsmoment

Lösning forts:

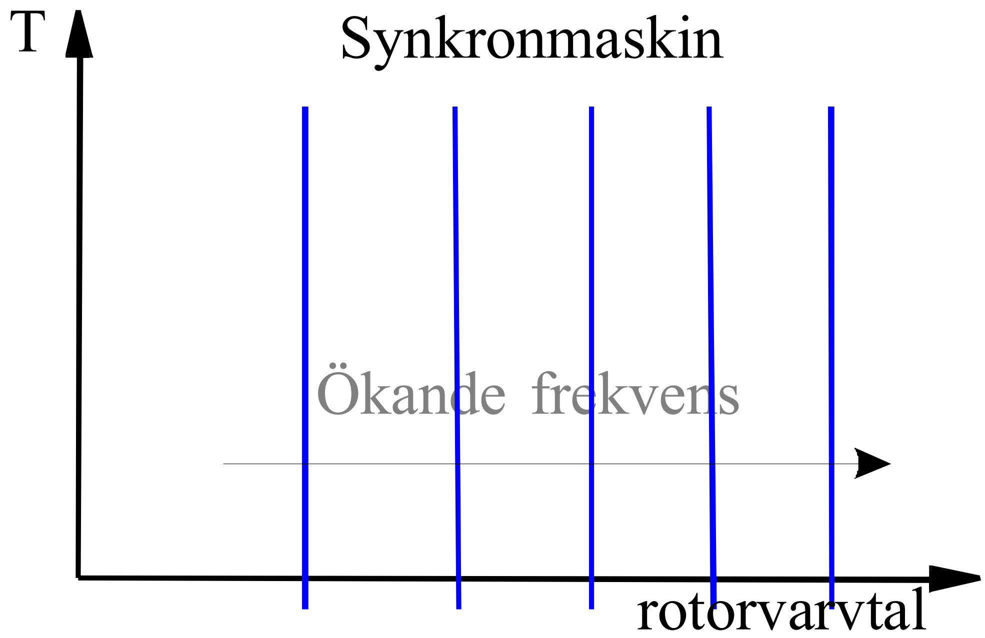
Cykelns rörelseenergi är densamma oavsett hur den uttrycks och därmed kan energiuttrycken ovan sättas lika vilket ger:

$$\frac{m \cdot v^2}{2} = \frac{m \cdot \left(\frac{10}{6\pi}\omega\right)^2}{2} = \frac{m \cdot \left(\frac{10}{6\pi}\right)^2 \cdot \omega^2}{2} = \frac{J_{ekv} \cdot \omega^2}{2} \quad \Rightarrow$$

$$J_{ekv} = m \cdot \left(\frac{10}{6\pi}\right)^2 = 100 \cdot \left(\frac{10}{6\pi}\right)^2 \mathrm{kgm}^2 = 28.1\,\mathrm{kgm}^2$$

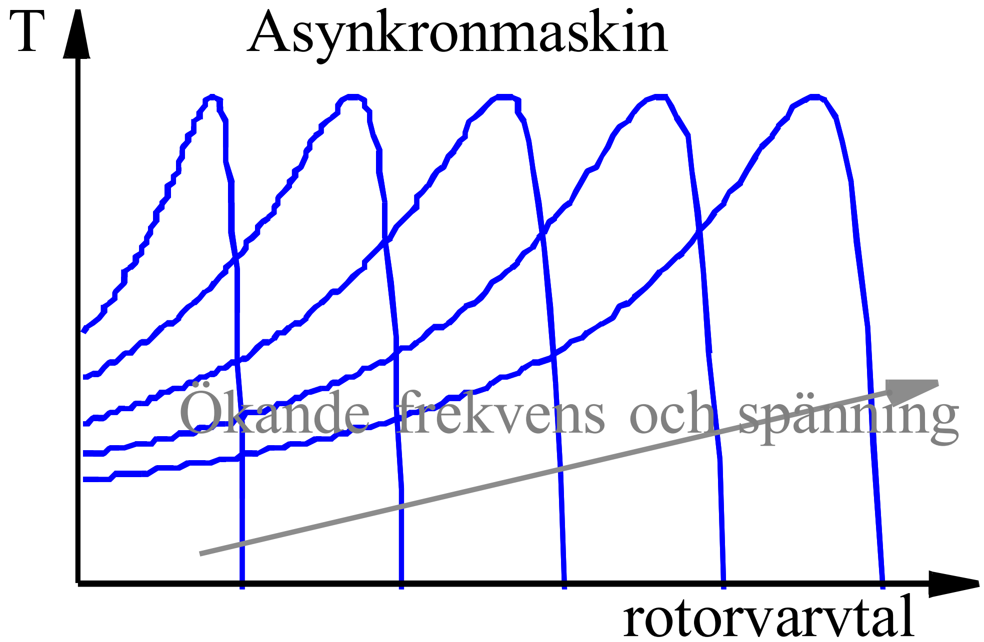
Detta tröghetsmoment motsvarar ungefär tröghetsmomentet hos en massiv järnskiva (=cylinder) med längden 1 dm och radien 0.4 m.

Drivmoment för olika motortyper (I)
- Synkronmaskinen



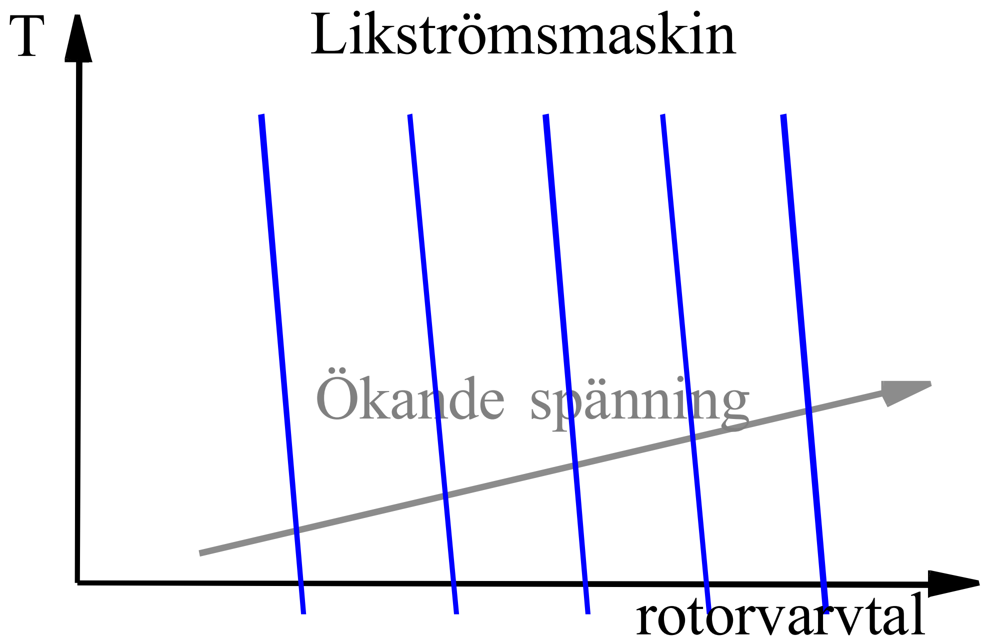
Figur 6.5. Synkronmaskinens momentkarakteristik vid drivning med konstant spänning och frekvens

Drivmoment för olika motortyper (II)
- Asynkronmaskinen



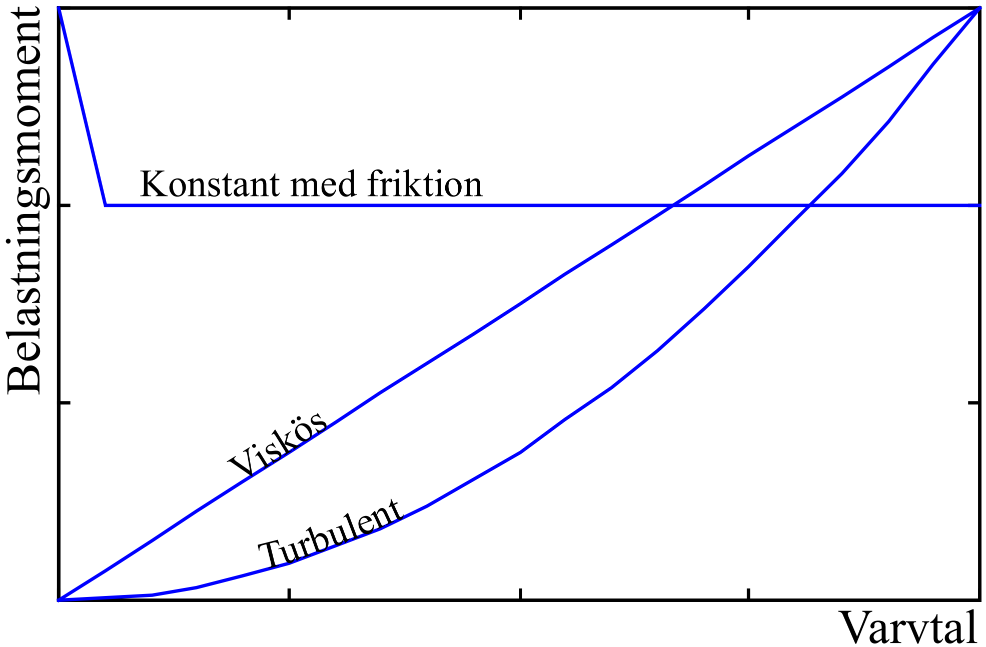
Figur 6.6. Asynkronmaskinens momentkarakteristik vid drivning med konstant spänning och frekvens

Drivmoment för olika motortyper (III)
- Likströmsmaskinen



Figur 6.7. Likströmsmaskinens momentkarakteristik vid drivning med konstant spänning.

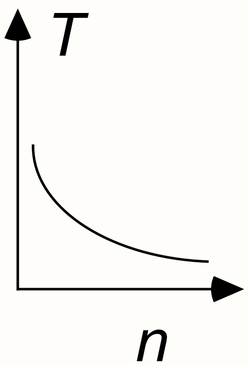
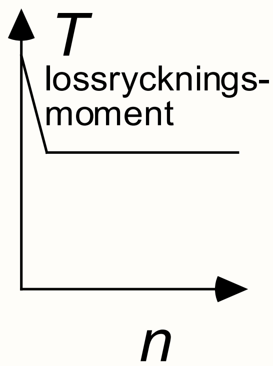
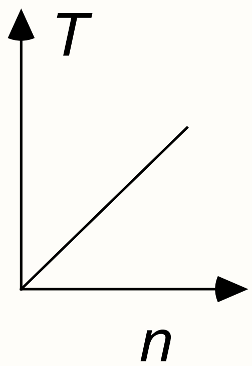
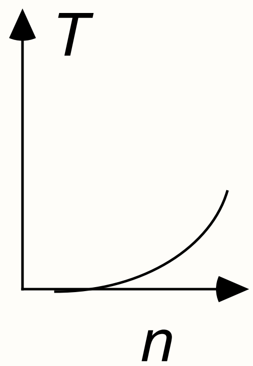
Belastningsmoment



Figur 6.8. Illustration av olika belastningsmoment.

Industrial Electrical Engineering and Automation

Lasters mekanik

Effekt-samband	P = konst	$P \sim n$	$P \sim n^2$	$P \sim n^3$
Moment-samband	$T_L \sim 1/n$	T_L = konst	$T_L \sim n$	$T_L \sim n^2$
				
Exempel	Hasplar Svarvar Slip-maskiner	Transport-maskiner Valsverk	System med viskös friktion	Pumpar Fläktar

Belastningsmoment

Ofta en kombination av olika momentbehov

T_0 konstant belastningsmoment

T_G gravitationskrafter

$d_0(\omega)$ vilofriktion – Coulombfriktion

$d_1 \cdot \omega$ visköst belastningsmoment

$d_2 \cdot \omega^2$ turbulent belastningsmoment

$\frac{k_1}{\omega}$ belastningsmoment med konstant effekt

$$T_L = T_0 \pm T_G + d_0(\omega) + d_1 \cdot \omega + d_2\omega^2 + \frac{k_1}{\omega}$$

Belastningsmoment
- Exempel: Momentet för en upprullningsanordning

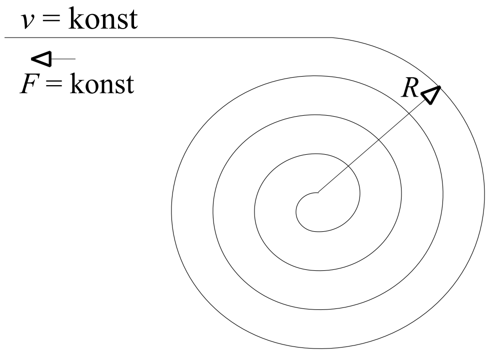
Vid ett pappersbruk är det väsentligt att reglera pappersmatningen så, att pappret matas på rullar med konstant kraft och konstant hastighet, så att pappret inte utsätts för ojämn belastning och dras sönder. Se figur 6.9.

Med en konstant matningshastighet v, en konstant dragkraft f och variabel radie R blir den nödvändiga matningseffekten.

$$p_d = v \cdot f = \omega \cdot R \cdot \frac{T_d}{R} = \omega \cdot T_d = \text{konstant}$$

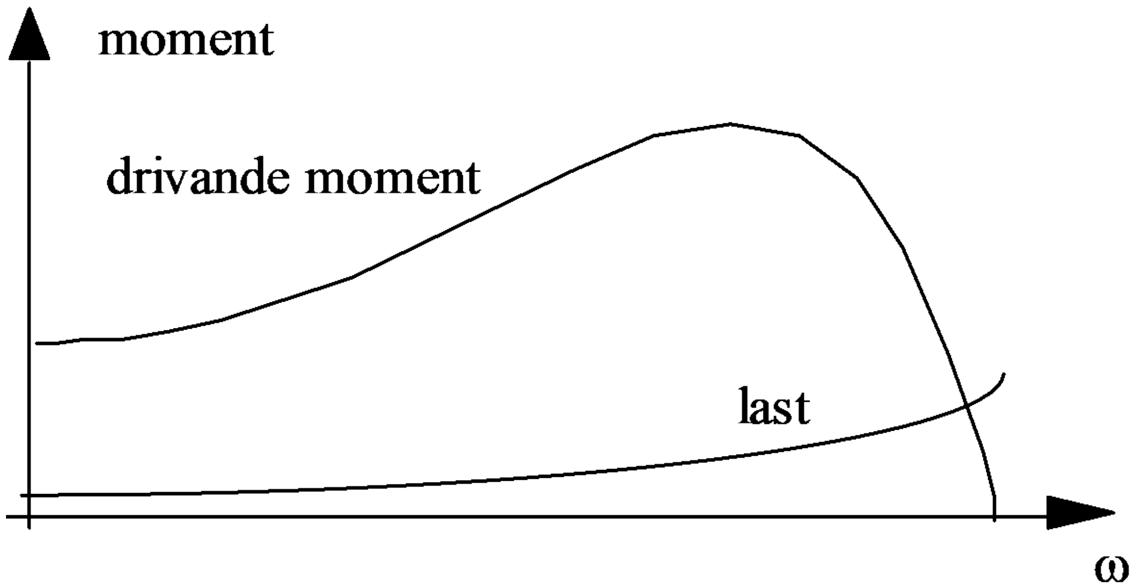
Med andra ord:

$$T_L = k_1 / \omega$$



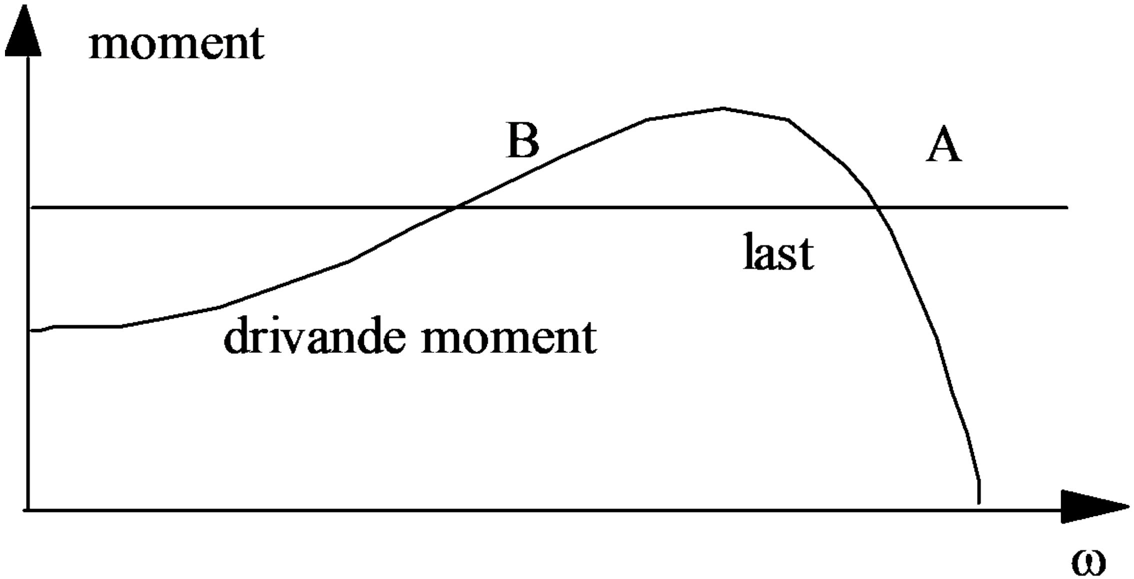
Figur 6.9. Upprullnings-anordning med konstant matningshastighet v och konstant dragkraft f.

Arbetspunkt (I)



Figur 6.10. Arbetspunkt för en asynkronmaskin med en fläkt.

Arbetspunkt (II)



Figur 6.11. Arbetspunkter för en asynkron-maskin med gravitationsmoment.

Mekanisk effekt (upplagrade energin i systemet)

Betrakta momentekvationen där tröghetsmomentet J är konstant. Om varje term multipliceras med ω erhålles

$$J\omega\frac{d\omega}{dt} = \omega T_d - \omega T_L = p_d - p_L$$

där p_d motsvarar drivande effekten och p_L belastningseffekten. Effekten bestäms allmänt genom produkten av vinkelhastighet ω och moment T:

$$p = \omega T$$

Vänsterledet i differentialekvationen motsvarar ändringen i den kinetiska energi som lagras i de roterande massorna. Genom att integrera med initialvillkoret erhåller vi energibalansen

$$\frac{1}{2}J\omega^2 = \int_0^t p_d dt - \int_0^t p_L dt = W_d(t) - W_L(t)$$

där vänsterledet motsvarar den upplagrade kinetiska energin

Mekanisk effekt
- Exempel: Effektförluster vid strypning

Många pumpar och fläktar drivs idag utan varvtalsreglering. En fläkt har ett belastningsmoment: $\approx d_2\omega^2$

Det betyder att effektförbrukningen för motorn är proportionell mot ω^3

En enkel och gammal metod som används för att minska luftflödet är **strypning** med ventiler. Trots att metoden är mycket energislösande är den fortfarande mycket vanlig.

Antag t.ex. att det verkliga luftbehovet är 80% av fullast. Luftflödet är ungefär proportionellt mot fläktens hastighet. Om varvtalet kan regleras till 80% av maxvärdet motsvarar detta en effektreduktion till $0.80^3 \approx 0.51$.

med andra ord till *hälften*. Tar man dessutom hänsyn till att friktionsförlusterna minskar, så blir energibesparingen stor.

Termiska effekter

För att konstruera elektriska drivsystem räcker det inte med lämpliga momentkurvor eller adekvat effekt. Termiska transienter från oundvikliga värme- och friktionsförluster i motor och axlar är mycket betydelsefulla i drivsystem. Olika maskiner har olika isoleringsmaterial och tål därför olika temperaturer. En maskin klassas således efter den värmetålighet den har. Exempelvis betyder isolationsklass B att den övre gränstemperaturen tillåts vara 130 °C medan klass F tillåter 155 °C. Detta kommer att avgöra vilket driftsätt som är möjligt för den aktuella maskinen, tex kontinuerlig drift, snabba starter och stopp e.d.

De vanligaste värmekällorna i en elmaskin är

- Kopparförluster
- Järnförluster
- Friktionsförluster

Industrial Electrical Engineering and Automation